

淺談簡單卡爾曼濾波器

(Kalman Filter)

設計處 李苗鋒

一、由來:

卡爾曼濾波器源由匈牙利數學家魯道夫.E.卡爾曼 -Hungarian émigré Rudolf E. Kálmán 於 1960 年發表的博士論文《A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems》- (線性濾波和預測問題的新方法)，並且由他來命名，後續也有許多相關的論文和研究引用該篇;雖然 Thorvald Nicolai Thiele 和 Peter Swerling 在早些時間也有研發出類似的理論。[1][5]

二、發展:

卡爾曼濾波器也被用於解決阿波羅計劃的軌道預測。卡爾曼最初所提出的卡爾曼濾波器現在被稱為簡單卡爾曼濾波器，最常見的簡單卡爾曼濾波器的使用方式是鎖相環，在頻率調變(FM)收音機、電視機、衛星通訊，幾乎通訊設備中都有使用。另外卡爾曼濾波器也是控制系統工程中的一大課題。目前該濾波器已廣泛應用於各個行業包括載具控制、輔助導航，感測，機器人以及估測領域等等。之後也陸續發展出簡單卡爾曼濾波器的變種例如:施密特的 EKF、信息濾波器以及 Bierman, Thornton 的平方根濾波器。[5]

三、基本的動態系統模型:

卡爾曼濾波器基本動態系統可以用一個馬爾可夫鏈表示，該馬爾可夫鏈裡

的線性變換同時被高斯雜訊干擾。系統的狀態可以用一個元素為實數的向量表示。隨著離散時間的每一次加入，這個線性變換就會作用在當前狀態上，產生一個新的狀態，並也會伴隨一些雜訊，同時系統的一些已知的控制器的控制信息也會被加入。同時，另一個受雜訊干擾的線性變換產生出這些潛在狀態的可見輸出。

為了從一系列有雜訊的觀察數據中用卡爾曼濾波器估計出被觀察過程的內部狀態，我們必須把這個過程在卡爾曼濾波的框架下建立模型。也就是說對於每一次 K ，且定義矩陣 F_K, H_K, Q_K, R_K 有時也需要定義 B_K ，如下圖 1。[4]

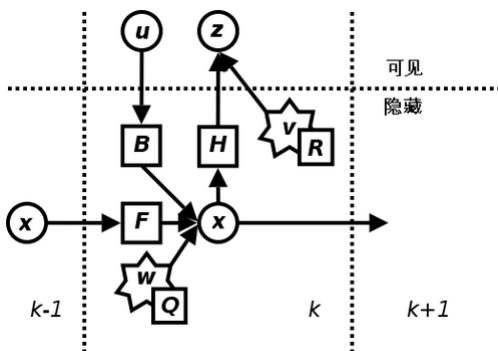


圖 1 卡爾曼濾波器的模型。圓圈代表向量，方塊代表矩陣，星號代表高斯雜訊 [4]

卡爾曼濾波模型假設 k 時刻的真實狀態是從 $(K-1)$ 時刻的狀態演化而來，符合下式：

$$x_k = F_k x_{k-1} + B_k u_k + w_k$$

其中

F_k 是作用在 x_{k-1} 上的狀態變換模型（矩陣/向量）

B_k 是作用在控制器向量 u_k 上的控制模型。

W_k 是過程雜訊，並假定其均值為零，共變異數矩陣為 Q_k 的常態分佈。

$$W_K \sim N(0, Q_K)$$

時刻 k ，對真實狀態 x_k 的一個測量 Z_k 滿足下式

$$Z_k = H_K x_K + V_K$$

其中 H_K 是觀測模型，它把真實狀態空間對應到觀測空間， V_K 是觀測雜訊，其均值為零，共變異數矩陣為 R_K ，且常態分佈。

$$V_K \sim N(0, R_K)$$

初始狀態以及每一時刻的雜訊 $\{x_0, W_1, \dots, W_K, V_1, \dots, V_K\}$ ，都認為是互相獨立的。[4]

四、介紹:

卡爾曼濾波器是一個最佳化離散式資料的回歸演算法，只要獲知上一時刻狀態的估計值以及當前狀態的觀測值，且使用了一連串隨著時間的量測值，雖然這量測值不精準且包含了統計誤差，還是可計算出當前狀態的估計值，而且不需要記錄量測或者估計的歷史資料，卡爾曼濾波器卻仍可估計，經過每次的迴歸來讓估計值離動態系統狀態更接近。卡爾曼濾波器和其他濾波器不同之處，在於它是一種純粹的時域濾波器，它不需要像頻域濾波器那樣，需要在頻域時域的轉換。[2]

卡爾曼濾波器主要是由五條數學公式所構成的回歸演算法，有效的估算過程中的狀態，並且最小化均方誤差。這濾波器提供過去、現在甚至是未來的估測，也能在沒有精確系統模型下運行。例如，雷達的使用，主要功能是追蹤目標。但目標的位置、速度、加速度的測量值往往隨時都有干擾。卡爾曼濾波器利用

目標的動態信息，設法去除干擾的影響，得到一個關於目標位置的好估計。這個估計可以是當前目標位置的估計（濾波），也可以是將來位置的估計（預測），也可以是過去位置的估計（插值）。[4][5]

1、卡爾曼濾波器五條數學公式(1)~(5)簡介[2]:

x_k 是 k 時刻的系統狀態， $\hat{x}_{k-1}^-$ 是利用上一狀態預測的結果， $\hat{x}_{k-1}$ 是上一狀態最佳的結果;P 表示相對於系統狀態 x 的共變異數。

u_k 是 k 時刻對系統的控制量。(如果沒有控制量，就定為 0)

A 和 B 為系統參數，假設系統為多參數模型系統時，A 和 B 為矩陣。

A^T 表示為 A 的轉置矩陣。

z_k 是 k 時刻的測量值。

H 是測量系統的參數，對於多測量參數系統，H 為矩陣。

過程和測量的雜訊，他們被假設成高斯雜訊，他們的共變異數分別是 Q，R

2、卡爾曼濾波器時間更新(預測):

利用系統的上一狀態，來預測下一系統的狀態

$$\hat{x}_k^- = A\hat{x}_{k-1} + Bu_{k-1} \quad (1)$$

$$P_k^- = AP_{k-1}A^T + Q \quad (2)$$

3、卡爾曼濾波器量測更新(校正):

$$K_k = P_k^- H^T (HP_k^- H^T + R)^{-1} \quad (3)$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k (Z_k - H\hat{x}_k^-) \quad (4)$$

$$P_k = (1 - K_k H) P_k^- \quad (5)$$

卡爾曼濾波器的運作就如同圖 2 所示。

卡爾曼濾波器的操作包括兩個階段：預測與更新。在預測階段，濾波器使用上一狀態的估計，做出對當前狀態的估計。在更新階段，濾波器利用對當前狀態的觀測值優化在預測階段獲得的預測值，以獲得一個更精確的新估計值。

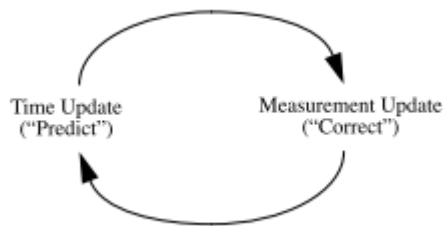


圖 2 持續不斷的卡爾曼濾波器迴圈

五、應用卡爾曼濾波器估計實例：

1、實例：

Let p_k denote the wombat population at time (k), and f_k denote the size of the wombat's food supply at time (k). From one time step to the next, half of the existing wombat population dies, but the number of new wombats is added to the population is equal to twice the food supply. The food supply is constant except for zero-mean random fluctuations with a variance of 10. At each time step the wombat population is counted with an error that has zero mean and a variance of 10. The initial state is [3]

$$p_0 = 650$$

$$f_0 = 250$$

The initial state estimate and uncertainty is

$$\hat{p}_0 = 600$$

$$E[(\hat{p}_0 - p_0)^2] = 500$$

$$\hat{f}_0 = 200$$

$$E[(\hat{f}_0 - f_0)^2] = 200$$

Design a Kalman filter to estimate the population and food supply
(Simulate the system and the Kalman filter for 10 time steps.)

*(1) A plot showing the true population and the estimated population as a function of time.

*(2) A plot showing the true food supply and the estimated food supply as a function of time.

*(3) A plot showing the standard deviation of the population and food supply estimation error as a function of time.

*(4) A plot showing the elements of the Kalman gain matrix as a function of time.

2、應用 Kalman filter:

這裡我們使用 MATLAB 這套軟體，來撰寫 Kalman filter 程式輔助模擬結果

如圖 3，4，5，6(MATLAB 是一套數學軟體，可用來動態系統模擬、數位訊號處理、科學計算。)

圖 3(1)

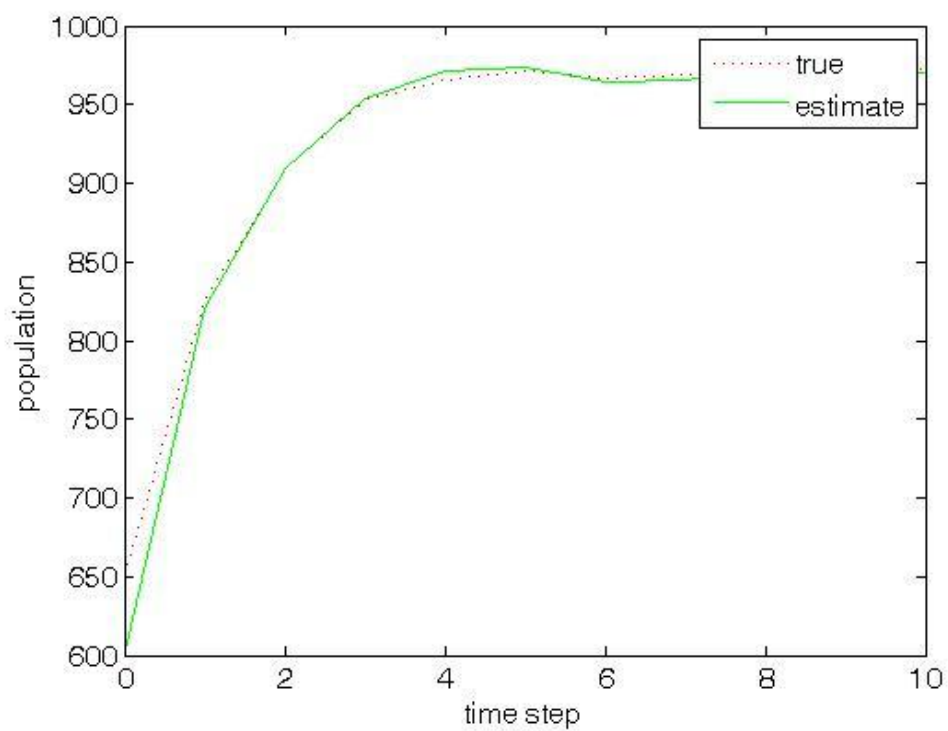


圖 4(2)

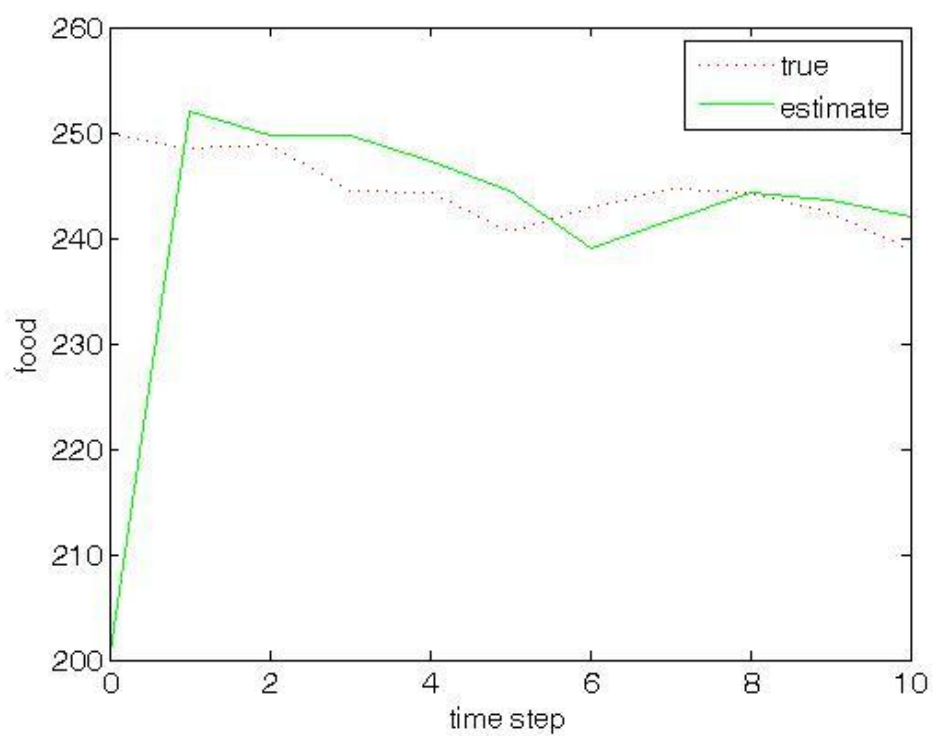


圖 5(3)

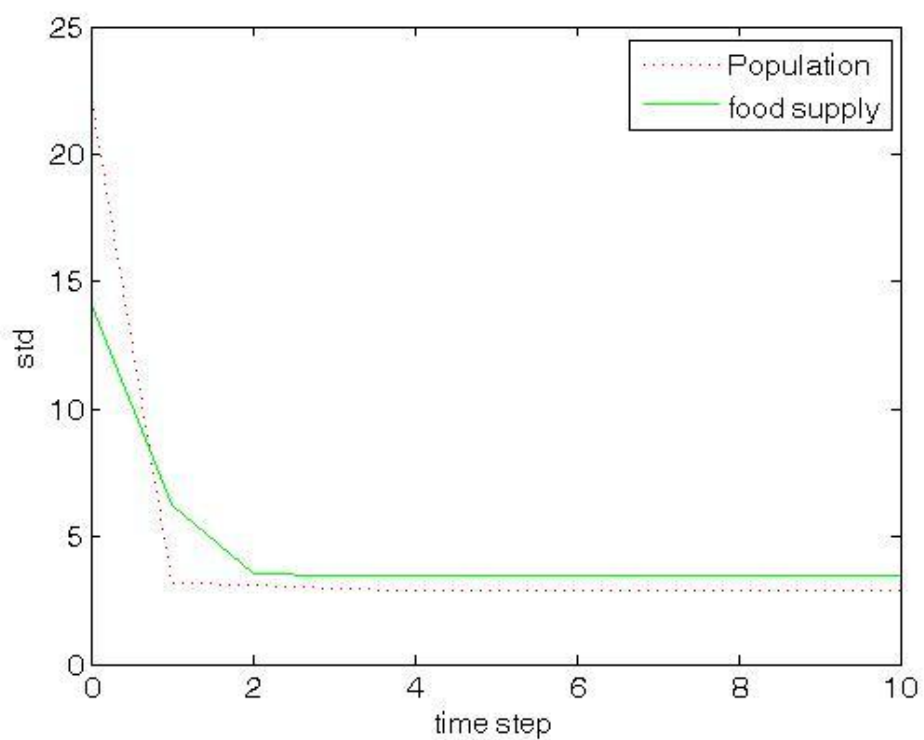
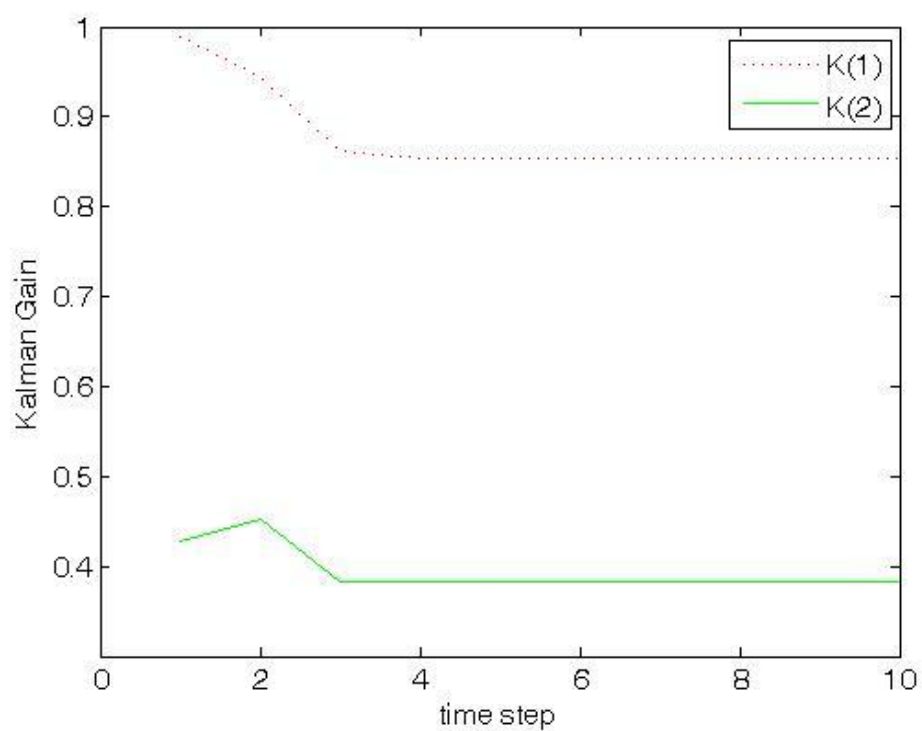


圖 6(4)，K(1)表 population，K(2)表 food supply



六、 引用

- 1、R. E. KALMAN, “A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems”
Journal of Basic Engineering, 82 (Series D): 35-45,1960
- 2、Greg Welch and Gary Bishop, “An Introduction to the Kalman Filter
, Monday, July 24, 2006
- 3、Dan Simon, “Optimal State Estimation”,
A JOHN WILEY & SONS, INC., PUBLICATION pp. 147-148, 2006
- 4、<http://www.wikiwand.com/zh-mo/%E5%8D%A1%E5%B0%94%E6%9B%BC%E6%BB%A4%E6%B3%A2#/.E5.91.BD.E5.90.8D>
- 5、https://en.wikipedia.org/wiki/Kalman_filter